Corrigé Devoir “maison” 1

Exercice 1. On note E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à 2. On note $\mathcal{B}$ la base de E formée des polynômes 1,X,X^2 et $\mathcal{B}^*$ la base duale de $\mathcal{B}$. On considère les trois formes linéaires sur E suivantes :

$$\ell_1(P) = P(1) \quad , \quad \ell_2(P) = P'(1) \quad , \quad \ell_3(P) = \int_0^1 P(x)dx$$

1. Quelles sont les coordonnées de ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 dans $\mathcal{B}^*$?
2. Montrer que (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est une base du dual E^*.
3. Trouver une base de E dont (ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3) est la base duale.

Corrigé. 1. Les coordonnées de ℓ_i dans la base duale de $(1, X, X^2)$ sont obtenus en calculant $\ell_i(1), \ell_i(X), \ell_i(X^2)$. On obtient :

$$\ell_1(1) = 1, \ell_1(X) = 1, \ell_1(X^2) = 1, \tag{1}$$
$$\ell_2(1) = 0, \ell_2(X) = 1, \ell_2(X^2) = 2, \tag{2}$$
$$\ell_3(1) = 1, \ell_3(X) = \tfrac{1}{2}, \ell_3(X^2) = \tfrac{1}{3}. \tag{3}$$

2. Pour montrer que l'on obtient une base, il suffit de vérifier que la matrice composée des coefficients calculés dans la question précédente,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

est inversible, c'est à dire de rang 3. Ceci peut se faire en appliquant l'algorithme du pivot de Gauss.

3. Notons $\mathcal{B}'$ la base de E que l'on cherche, de sorte que sa base duale est $\mathcal{B}'^* = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$. D'après le cours,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\mathcal{B}' =^T (\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}^*}\mathcal{B}'^*)^{-1} =^T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 2 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & \frac{1}{2} & 3 \\ 6 & -2 & -6 \\ -3 & \frac{3}{2} & 3 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, $\mathcal{B}' = (-3X^2 + 6X - 2, \frac{3}{2}X^2 - 2X + \frac{1}{2}, 3X^2 - 6X + 3)$ est la base recherchée.

Exercice 2. 1. On considère le plan affine $\mathcal{P}$ de $\mathbb{R}^3$, d'équation $2x - y + z = 3$. Donner un repère de $\mathcal{P}$. (Indication : commencer par donner une équation de du plan vectoriel P qui dirige $\mathcal{P}$, puis par trouver une base de P)

2. On considère la droite affine $\mathcal{D}$ passant par le point $(2, 1, -1)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u} = (-4, 1, 1)$. Trouver un système d'équations de la forme

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases},$$

dont $\mathcal{D}$ est l'ensemble des solutions. (Indication : commencer par trouver des équations pour la droite vectorielle D qui dirige $\mathcal{D}$)

Corrigé. 1. D'après le cours, on sait que pour toute matrice A et vecteur colonne B, l'ensemble des solutions de $AX = B$ est un espace affine dirigé par l'ensemble des solutions de $AX = 0$, c'est à dire le noyau de A. Ici, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = (3)$ ont une seule ligne. Le plan P qui dirige $\mathcal{P}$ est donc le noyau de la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v_2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

appartiennent au noyau. Comme ils sont linéairement indépendants, ils en forment une base.

2. Commençons par chercher à décrire D par des équations. Comme D est de codimension 2 dans $\mathbb{R}^3$, le cours sur la dualité affirme que D doit être décrite par deux équations linéairement indépendantes[1]. Or on remarque facilement que les formes linéaires $l_1(x, y, z) = x + 4y$ et $l_2(x, y, z) = x + 4z$ vérifient $l_1(\vec{u}) = l_2(\vec{u}) = 0$. D'où

$$\begin{cases} x + 4y = 0 \\ x + 4z = 0 \end{cases}$$

est un système d'équations caractérisant D. On en déduit que $\mathcal{D}$ est caractérisée par un système de la forme

$$\begin{cases} x + 4y = d_1 \\ x + 4z = d_2 \end{cases} .$$

Du fait que $(2, 1, -1) \in \mathcal{D}$, on déduit les valeurs de d_1 et d_2 :

$$d_1 = 6 \quad \text{et} \quad d_2 = -2.$$

Problème (Enveloppe convexe). On rappelle que par définition, étant donnés deux points A, B de l'espace affine $\mathbb{R}^n$, le *segment* $[A, B]$ est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs de A et B, ce qui peut aussi s'écrire :

$$[A, B] = \{M \in \mathbb{R}^n \mid \exists t \in [0, 1], M = tA + (1 - t)B\}.$$

Une partie $K \subset \mathcal{E}$ est dite *convexe* si pour tous points A, B de K, le segment $[A, B]$ est inclus dans K.

1. Parmi les cinq figures du plan suivantes, lesquelles sont convexes, lesquelles ne le sont pas : un cercle, un disque, une droite, un segment, la réunion de deux disques non confondus mais qui s'intersectent en au moins un point ? Pour chaque figure de la liste précédente qui n'est pas convexe, la dessiner ainsi qu'un segment qui contredit la définition (c'est à dire un segment ayant ses extrémités dans la figure en question mais n'étant pas entièrement inclus dedans).

   Etant donnés $k + 1$ points $A_0, \ldots, A_k$ de $\mathbb{R}^n$, on appelle *enveloppe convexe* de $A_0, \ldots, A_k$, et on note $\mathcal{C}(A_0, \ldots, A_k)$ l'ensemble de tous les barycentres **à coefficients positifs** de $A_0, \ldots, A_k$.
2. Dessiner l'enveloppe convexe des ensembles de points du plan affine $\mathbb{R}^2$ suivants :
   - $(1, 2)$ et $(1, 3)$.
   - $(1, 1)$, $(1, 4)$ et $(4, 1)$.
   - $(1, 1)$, $(1, 4)$, $(4, 1)$ et $(2, 2)$.
3. Montrer que l'enveloppe convexe d'un ensemble de points est toujours convexe. (Indication : penser à l'associativité du barycentre)

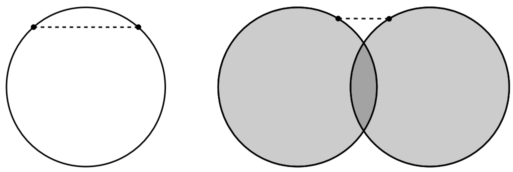
   On appelle demi-espace toute partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}^n$ de la forme $\mathcal{D} = \{M \in \mathbb{R}^n \mid \ell(\overrightarrow{OM}) \geq a\}$, où ℓ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, O est le point $(0, \ldots, 0)$ et a est un réel.
4. Représenter les demi-espaces de $\mathbb{R}^2$ suivants : $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 1\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 1\}$, $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -x - y \geq -4\}$. Quelle est leur intersection.

   Etant donnés $k+1$ points $A_0, \ldots, A_k$ de $\mathbb{R}^n$, on note $\mathcal{I}(A_0, \ldots, A_k)$ l'intersection de tous les demi-espaces qui contiennent $A_0, \ldots, A_k$.
5. Montrer que si un demi-espace $\mathcal{D}$ contient les points $A_0, \cdots, A_k$, alors il contient leur enveloppe convexe. En déduire que l'on a toujours $\mathcal{C}(A_0, \ldots, A_k) \subset \mathcal{I}(A_0, \ldots, A_k)$.
6. On s'intéresse à présent à l'inclusion réciproque. Et on suppose dans cette question que $k = n$ et que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ forment une base de $\mathbb{R}^n$. Montrer que pour tous $t_0, t_1, \ldots, t_n$ verifiant $t_0 + \cdots + t_n = 1$, un point M est le barycentre de $(A_0, t_0), \ldots, (A_n, t_n)$ si et seulement si les coordonnées de $\overrightarrow{A_0M}$ dans la base $\mathcal{B}$ sont $(t_1, \cdots, t_n)$.
7. On suppose toujours que $\mathcal{B}$ est une base. Soit M un point de $\mathbb{R}^n$ qui s'écrit comme barycentre de $(A_0, t_0), \ldots, (A_n, t_n)$ avec l'un des t_i strictement négatif. En considérant les formes linéaires $(t_1, \cdots, t_n) \mapsto t_i$ (c'est à dire la base duale de $\mathcal{B}$) et la forme linéaire $(t_1, \cdots, t_n) \mapsto -t_1 - \cdots - t_n$, montrer qu'il existe un demi-espace qui contient tous les $A_0, \ldots, A_n$ mais ne contient pas M. En déduire que $\mathcal{C}(A_0, \ldots, A_n) = \mathcal{I}(A_0, \ldots, A_n)$.
8. Voyez-vous comment montrer que $\mathcal{C}(A_0, \ldots, A_k) = \mathcal{I}(A_0, \ldots, A_k)$ pour un ensemble quelconque de points ?

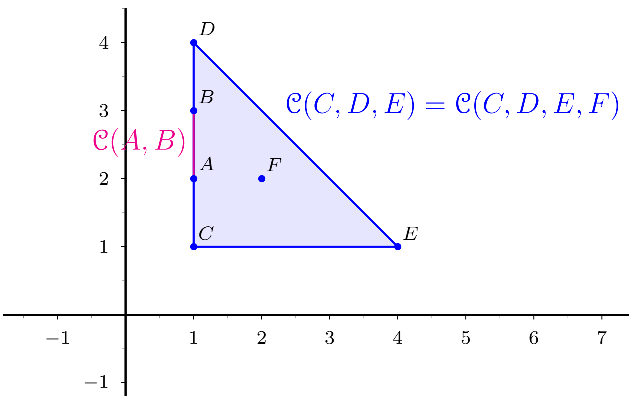
---

1. en termes abstraits l'ensemble des équations de D, noté $D^{\perp}$ dans le cours est de dimension 2

Corrigé. 1. Un cercle de rayon $r > 0$ n'est pas convexe, car si l'on prend deux points différents A_1 et A_2 sur ce cercle, le segment $[A_1, A_2]$ (appelé aussi une "corde") n'est pas contenu dedans. Un disque, une droite, un segment (ouvert, ou fermé, ou ouvert d'un côté et fermé de l'autre) sont des convexes du plan.
La réunion de deux disques non confondus mais qui s'intersectent en au moins un point ne sera convexe que si l'un des deux disques est inclus dans l'autre.



2. On pose $A = (1, 2)$, $B = (1, 3)$, $C = (1, 1)$ $D = (1, 4)$ $E = (4, 1)$ et $F = (2, 2)$. On dessine les enveloppes convexes suivantes.



3. Soient $k + 1$ points $A_0, \ldots, A_k$ de $\mathbb{R}^n$, et soit $\mathcal{C}(A_0, \ldots, A_k)$ leur enveloppe convexe. Prenons B_1 et B_2 deux points dans $\mathcal{C}(A_0, \ldots, A_k)$. Il existe donc des réels t_i et s_i, $i = 0 \ldots k$, tous dans l'intervalle $[0, 1]$, tels que $\sum_{i=0}^k t_i = 1$, $\sum_{i=0}^k s_i = 1$, et :

$$B_1 = \sum_{i=0}^{k} t_i A_i \qquad , \qquad B_2 = \sum_{i=0}^{k} s_i A_i \ .$$

Considérons un point M du segment $[B_1, B_2]$, c'est à dire qu'il existe un $t \in [0, 1]$ tel que : $M = tB_1 + (1 - t)B_2$. Alors il vient :

$$M = t\sum_{i=0}^{k} t_i A_i + (1-t)\sum_{i=0}^{k} s_i A_i = \sum_{i=0}^{k}(tt_i + (1-t)s_i)A_i \ .$$

Il s'agit donc de vérifier que les coefficients $r_i = (tt_i + (1 - t)s_i)$ satisfont à la fois :

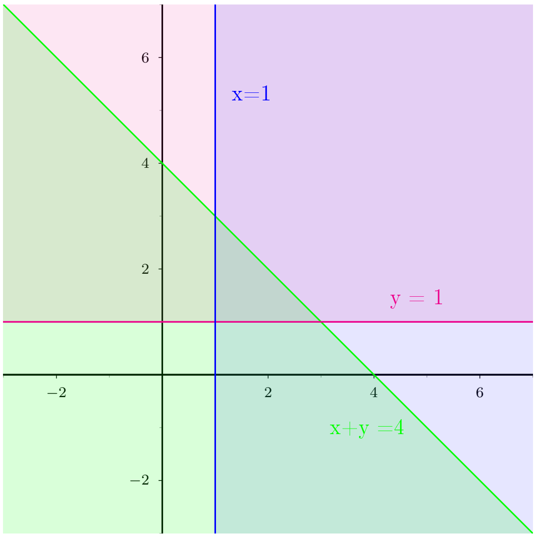
$$(1) \quad r_i \in [0, 1] \ , \ \forall i \in [\![1, n]\!] \qquad \text{et} \qquad (2) \ \textstyle\sum_{i=0}^k r_1 = 1 \ .$$

Les deux réels s_i et t_i sont dans $[0, 1]$ alors pour tout $t \in [0, 1]$ r_i décrit le sous-segment de $[01]$ compris entre s_i et t_i. Donc (1) est satisfait. De plus :

$$\sum_{i=0}^{k}(tt_i + (1-t)s_i) = t\sum_{i=0}^{k} t_i + (1-t)\sum_{i=0}^{n} s_i = t + 1 - t = 1 \ ,$$

donc les r_i satisfont aussi (2).

4. Le demi-espace $\mathcal{D}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 1\}$ correspond à la partie droite du plan séparé en deux par la droite verticale d'équation $y = 1$, et le demi-espace $\mathcal{D}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \geq 1\}$ correspond à la partie du plan situé en dessous de la droite horizontale $x = 1$. Enfin, le demi-espace $\mathcal{D}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -x - y \geq -4\}$ s'obtient en traçant la droite d'équation $y = -x + 4$ et en gardant la région en dessous de cette droite (voir figures).
   L'intersection $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3$ est alors le triangle au centre de la figure bordé par les trois droites citées ci-dessus.



5. Soit un demi-espace $\mathcal{D}$ contenant les points $A_0, \cdots, A_k$. Il existe donc une forme linéaire l et un réel a tels que :
$$\forall i = 0 \ldots k \ , \ l(\overrightarrow{OA_i}) \geq a \ .$$
   Soit un point $B \in \mathcal{C}(A_0, \ldots, A_k)$, c'est à dire qu'il existe $k+1$ coefficients $t_i \in [0, 1]$ tels que $\sum_{i=0}^{k} t_i = 1$ et $B = \sum_{i=0}^{k} t_i A_i$. Il vient :
$$l(\overrightarrow{OB}) = l(\sum_{i=0}^{k} t_i \overrightarrow{OA_i}) = \sum_{i=0}^{k} t_i l(\overrightarrow{OA_i}) \geq \left(\sum_{i=0}^{k} t_i \right) a = a \ .$$
   En conclusion, B est dans le demi-espace $\mathcal{D}$, ce qui démontre l'inclusion $\mathcal{C}(A_0, \ldots, A_k) \subset \mathcal{D}$. Ceci étant valable pour tout demi-espace $\mathcal{D}$ contenant les points $A_0, \ldots, A_k$, on obtient l'inclusion : $\mathcal{C}(A_0, \ldots, A_k) \subset \mathcal{I}(A_0, \ldots, A_k)$.

6. On s'intéresse à présent à l'inclusion réciproque. Et on suppose dans cette question que $k = n$ et que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_n})$ forment une base de $\mathbb{R}^n$. Soient $n+1$ coefficients $t_0, t_1, \ldots, t_n$ verifiant $t_0 + \cdots + t_n = 1$, on a par définition du barycentre :
$$M \text{ est le barycentre de } (A_0, t_0), \ldots, (A_n, t_n) \quad \Leftrightarrow \quad \forall A \in R^n \ , \ \overrightarrow{AM} = \sum_{i=0}^{k} t_i \overrightarrow{AA_i} \ .$$
   En écrivant, pour tout point A de $\mathbb{R}^n$, $\overrightarrow{AM}$ sous la forme $\overrightarrow{AA_0} + \overrightarrow{A_0M}$, on obtient :
$$M \text{ est le barycentre de } (A_0, t_0), \ldots, (A_n, t_n) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=0}^{k} t_i \overrightarrow{A_0A_i} \ ,$$
   d'où le résultat.

7. Soit M un point de $\mathbb{R}^n$, barycentre de $(A_0, t_0), \ldots, (A_n, t_n)$. Supposons que t_i est négatifs. Supposons que $i \neq 0$, et considérons l_i la forme linéaire $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i$. On remarque que :
d'une part $l_i(\overrightarrow{OA_j}) = l_i(\overrightarrow{OA_0}) + l_i(\overrightarrow{A_0A_j}) = \begin{cases} l_i(\overrightarrow{OA_0}) + 0 \text{ si } j = 0 \\ l_i(\overrightarrow{OA_0}) + 1 \text{ si } j = 1 \ldots n \end{cases}$,
d'autre part $l_i(\overrightarrow{OM}) = l_i(\overrightarrow{OA_0}) + l_i(\overrightarrow{A_0M}) = l_i(\overrightarrow{OA_0}) + t_i$. Il vient donc que tous les A_i sont contenus dans le demi-espace $\mathcal{D} = \{N \in \mathbb{R}^n \ / \ l_i(\overrightarrow{ON}) \geq l_i(\overrightarrow{OA_0})\}$, mais pas M.

Supposons maintenant que t_0 est strictement négatif. On considère l'application linéaire l : $(x_1, \cdots, x_n) \mapsto -x_1 - x_2 \ldots - x_n$. On a :
$l(\overrightarrow{OA_j}) = l(\overrightarrow{OA_0}) + l(\overrightarrow{A_0A_j}) = \begin{cases} l(\overrightarrow{OA_0}) + 0 \text{ si } j = 0 \\ l(\overrightarrow{OA_0}) - 1 \text{ si } j = 1 \ldots n \end{cases}$,
En particulier, pour tout $j = 1, \ldots, n$, $l(\overrightarrow{OA_j}) \geq l(\overrightarrow{OA_0}) - 1$. D'un autre côté on a : $l(\overrightarrow{OM}) = l(\overrightarrow{OA_0}) + l(\overrightarrow{A_0M}) = l(\overrightarrow{OA_0}) - t_1 - \ldots - t_n$. Comme $t_0 + t_1 + \ldots + t_n = 1$ on a $t_0 = 1 - t_1 - \ldots - t_n < 0$ d'où $t_1 - \ldots - t_n < -1$. Il vient donc que tous les A_i sont contenus dans le demi-espace $\mathcal{D} = \{N \in \mathbb{R}^n \ / \ l(\overrightarrow{ON}) \geq l_i(\overrightarrow{OA_0}) - 1\}$, mais pas M.

Dans tous les cas, on a obtenu qu'un point qui n'est pas barycentre à coefficients positifs des $A_0, \ldots, A_n$ est alors exclu de l'ensemble $\mathcal{I}(A_0, \ldots, A_n)$. Or, M n'est pas barycentre à coefficients positifs des $A_0, \ldots, A_n$ si et seulement si M n'appartient pas à l'enveloppe convexe $\mathcal{C}(A_0, \ldots, A_n)$.
Donc en résumé :

$$M \notin \mathcal{C}(A_0, \ldots, A_n) \ \Rightarrow \ M \notin \mathcal{I}(A_0, \ldots, A_n)$$

ce qui est équivalent à :

$$M \in \mathcal{I}(A_0, \ldots, A_n) \ \Rightarrow \ M \in \mathcal{C}(A_0, \ldots, A_n) \ ,$$

D'où l'inclusion réciproque : $\mathcal{I}(A_0, \ldots, A_n) \subset \mathcal{C}(A_0, \ldots, A_n)$, et donc l'égalité.